

6 軌跡

概念重溫

A. 不同類型的直線方程

1. 點斜式 (point-slope form)

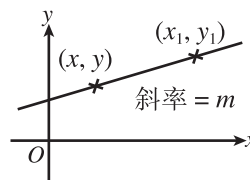
經過 (x_1, y_1) 及斜率為 m 的直線的方程為

$$y - y_1 = m(x - x_1)。$$

例如，若一直線經過 $(2, 1)$ 及斜率為 3，其方程為

$$y - 1 = 3(x - 2) \quad \blacktriangleleft \text{化簡答案。}$$

$$3x - y - 5 = 0$$



2. 兩點式 (two-point form)

經過兩點 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 的直線的方程為

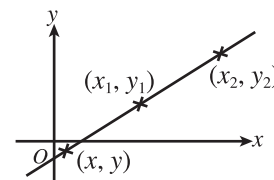
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}。$$

例如，若一直線經過 $(4, 5)$ 及 $(7, 2)$ ，其方程為

$$\frac{y - 5}{x - 4} = \frac{2 - 5}{7 - 4}$$

$$3(y - 5) = -3(x - 4) \quad \blacktriangleleft \text{把 } x_1, x_2 \text{ 及 } y_1, y_2 \text{ 的值同時對調，}$$

$$x + y - 9 = 0 \quad \text{仍可得到相同的結果。}$$



備註： $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 項為直線的斜率。

3. 斜截式 (slope-intercept form)

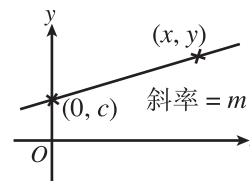
若一直線的 y 軸截距為 c 及斜率為 m ，其方程為

$$y = mx + c。$$

例如，若一直線的 y 軸截距為 4 及斜率為 5，其方程為

$$y = 5x + 4。$$

備註：「斜截式」中的「截」代表 y 軸截距。若我們只知道 x 軸截距及斜率，則應利用點斜式求方程。



4. 截距式 (intercept form)

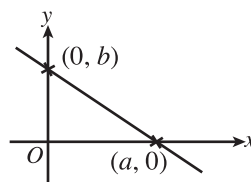
若一直線的 x 軸截距及 y 軸截距分別為 a 及 b ，其方程為

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1。$$

例如， x 軸截距為 1 及 y 軸截距為 2 的直線之方程為

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$$

$$2x + y = 2$$



B. 一般式

1. 直線方程的一般式 (general form) 為 $Ax + By + C = 0$ ，其中 A 、 B 及 C 為常數。

根據一般式 (其中 A 及 $B \neq 0$)，可得

(a) 斜率 = $-\frac{A}{B}$

(b) x 軸截距 = $-\frac{C}{A}$

(c) y 軸截距 = $-\frac{C}{B}$

例如，對於直線 $2x + 7y - 8 = 0$ ，

$$\text{斜率} = -\frac{2}{7}, \quad x \text{ 軸截距} = 4, \quad y \text{ 軸截距} = \frac{8}{7}。$$

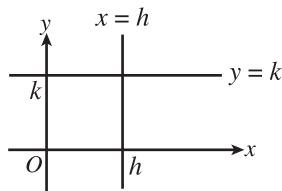
2. 當 $A = 0$ 及 $B \neq 0$ 時，直線方程變為 $By + C = 0$ 。這代表一條斜率為零的水平線。該直線一般都以 $y = k$ 表示，其中 k 為 y 軸截距。

3. 當 $B = 0$ 及 $A \neq 0$ 時，直線方程變為 $Ax + C = 0$ 。這代表一條鉛垂線，其斜率是沒有定義的。該直線一般都以 $x = h$ 表示，其中 h 為 x 軸截距。

4. 當 $C = 0$ 及 $A, B \neq 0$ ，直線通過原點且其斜率為 $-\frac{A}{B}$ 。

5. 若 (p, q) 為直線 $Ax + By + C = 0$ 上的一點，則 $Ap + Bq + C = 0$ 。

備註：在本單元中，除特別註明外，所有有關直線方程的答案都是以一般式表示。


 相關課題

有關坐標幾何的基本知識，可參考單元 18。

2. 若圓的方程以 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的形式表示，其中 D 、 E 及 F 為常數。該方程稱為圓的方程的一般式。在這情況下，圓心 = $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 及半徑 = $\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F}$ 。
- 例如，對於一圓的方程 $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$ ，
圓心 = $(2, 4)$ ，半徑 = $\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - 3} = \sqrt{17}$ 單位。

重點摘要

當從圓的一般式求圓心及半徑時，我們應先將 x^2 及 y^2 的係數轉換為 1。

F. 圓與直線的交點

1. 已知一直線及一圓的方程：

$$\begin{cases} y = mx + c \\ x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$$

利用代入法，可得出條一元二次方程

$$(1 + m^2)x^2 + (2mc + D + Em)x + (c^2 + Ec + F) = 0。$$

透過解方程便可求得交點。

2. 交點的數目

考慮上述的一元二次方程的判別式 Δ 。

- (a) 當 $\Delta > 0$ ，圓與直線有兩個交點。

例如，

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0 \text{ 及 } 2x - 3y - 4 = 0$$

有兩個交點。

- (b) 當 $\Delta = 0$ ，圓與直線有一個交點。

例如，

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y - 4 = 0 \text{ 及 } 2x + 5y - 52 = 0$$

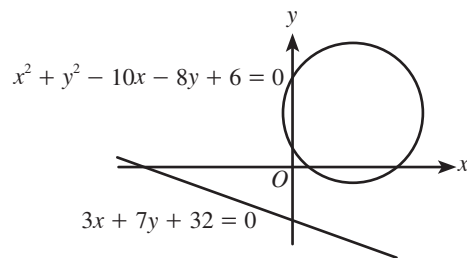
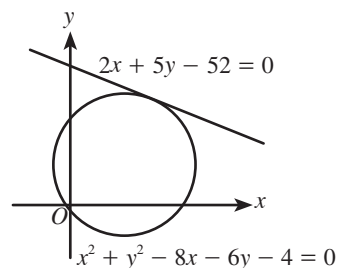
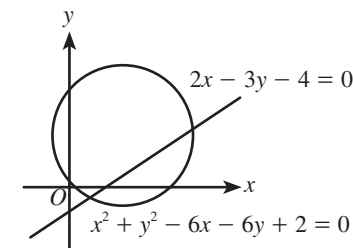
只有一個交點。

- (c) 當 $\Delta < 0$ ，圓與直線則沒有交點。

例如，

$$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 6 = 0 \text{ 及 } 3x + 7y + 32 = 0$$

沒有交點。



HKDSE 小提示

有關直線、切線及圓的題目經常於公開考試中出現。可參考 P.111 及 P.112 第 48 及 50 題。

概念測試站

判別下列各句是否正確。

1. 經過兩點 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 的直線的斜率為 $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ 或 $\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$ 。

2. 水平線的斜率為 0。

3. 若兩直線的斜率相等，則兩者必定有無限多個交點。

4. 直線 $L: bx + ay + c = 0$ 的 x 軸截距為 $-\frac{c}{a}$ 。

5. 若 $ax + by + c = 0$ 及 $dx + ey + f = 0$ 沒有交點，則 $ae = bd$ 。

6. 若一圓的圓心及半徑分別為 $(1, 2)$ 及 3 單位，其方程為 $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$ 。

7. 圓 $4(x + 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 6^2$ 的半徑為 3 單位。

8. 圓 $2x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 4 = 0$ 的圓心為 $(3, -4)$ 。

9. 若一點和圓心的距離小於圓的半徑，則該點位於圓外。

NF 10. 圓 $x^2 + y^2 - 25 = 0$ 及直線 $y = 4$ 有兩個交點。

NF 11. 圓 $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 及直線 $y = x$ 只得一個交點。



解題演示

甲部 (1)

1. A 及 B 的坐標分別為 $(8, -7)$ 及 $(-2, 5)$ 。求 AB 的垂直平分線的方程。
(4 分)

解

$$AB \text{ 的斜率} = \frac{5 - (-7)}{-2 - 8} = \frac{12}{-10} = -\frac{6}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{垂直平分線的斜率} &= -1 \div \left(-\frac{6}{5}\right) \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

[1M]

重點摘要

AB 的垂直平分線為與 AB 垂直且經過 AB 的中點的直線。

重點摘要

若 L_1 與 L_2 互相垂直，則 $m_{L_1} \times m_{L_2} = -1$ 。

4. 繪畫箱形圖以表示以下的數據。

1, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 12, 12, 13

5. 下表所示為今天一個服務熱線的通話時間（以分鐘為單位）。

時間 (分鐘)	1 - 5	6 - 10	11 - 15	16 - 20
頻數	34	21	16	9

列式計算通話時間的標準差，答案準確至三位有效數字。

- NF 6.** 若某數據組 $\{p, q, r, s\}$ 的分佈域，四分位數間距及標準差分別是 80, 45 及 22，求以下各數據組的分佈域，四分位數間距及標準差。
(a) $\{p + 3, q + 3, r + 3, s + 3\}$ **(b)** $\{2p, 2q, 2r, 2s\}$
- NF 7.** 一批學生在一次考試的分數的平均值及標準差分別是 60 分及 5 分。若宗華在考試中取得 43 分，求他的分數的標準分。
- NF 8.** 已知一呈正態分佈的數據組的平均值是 40 及標準差是 5。求數據在 35 及 45 之間所佔的百分數。

模擬試題

下列各問題中，除特別指明外，數值答案取真確值或準確至三位有效數字。

甲部 (1)


1. 對於數據組 4, 5, 7, 3, 2, 5, 9, 求

- (a)** 平均值；
(b) 分佈域；
(c) 標準差。

(3 分)


2. **(a)** 求以下數據組的分佈域，四分位數間距及標準差。

23, 44, 15, 22, 34, 87

-  **(b)** 試解釋為何用四分位數間距來量度這數據組的離差較用標準差更適當。

(4 分)

3. 幹葉圖顯示了一組學生在一分鐘內做掌上壓的數目。求中位數，四分位數間距及標準差。

 題型參考：香港中學會考 07Q4

(3 分)

幹 (十位)	葉 (個位)
2	3 5 6 7
3	1 3 3 4 5 7 8 8 9
4	2 3 4 6 8
5	0 1

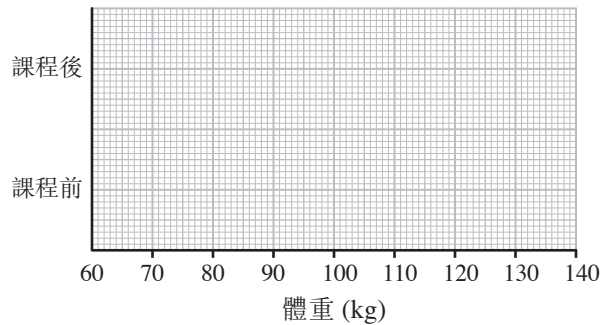
29. 10 人參加了某健身中心的健身課程。下表所示為他們參加課程前及後的體重 (以 kg 為單位)。

參加課程前的體重 (kg)	參加課程後的體重 (kg)
85 80 90 90 88	73 65 76 102 111
100 110 130 120 100	120 110 65 68 110

(a) 以箱形圖表示以上數據。

(4 分)

參加課程前及後的體重



(b) 求課程前和課程後的平均體重。

(2 分)

(c) 健身中心的經理聲稱，在參加健身課程後，所有參加者的體重都最少減了 10%。你同意該經理的說法嗎？試解釋你的答案。

(2 分)

乙部

30. 假設某數據組 $\{a, b, c, d, e\}$ 的平均值，四分位數間距及標準差分別為 88, 24 及 13。對於數據組 $\{3a - 10, 3b - 10, 3c - 10, 3d - 10, 3e - 10\}$ ，求

(a) 平均值；

(1 分)

(b) 四分位數間距；

(1 分)

(c) 標準差。

(1 分)

31. 在一學校中，學生身高分佈的平均值為 162 cm。栢慧及祖明的標準分分別為 1.2 及 -2.4。祖明的身高為 150 cm。一教師宣稱身高分佈的分佈域最多為 15 cm。該宣稱是否正確？試解釋你的答案。

題型參考：HKDSE 16Q16

(3 分)

32. 以下所示為美華在 10 次跳遠的成績 (以 m 為單位)。

6.2 6.3 6.5 5.8 5.6 7.1 6.3 6.4 6.6 5.9

(a) 求她的成績的四分位數間距及標準差。

(2 分)

(b) 已知其中一次成績「7.1 m」因美華起跳時犯規而被取消，並將該次成績改為零。

(i) 求新的四分位數間距。

(ii) 不需任何計算，指出標準差會怎樣改變。

(3 分)